线性卷积计算循环卷积的快速改进算法*

毕春艳　徐　晋

（四川大学锦江学院　电气与电子信息工程学院　四川　620860）

摘要:循环卷积无论是按照定义直接计算还是用图解法计算过程均比较复杂,本文分析了有限长序列线性卷积、周期卷积和循环卷积之间的关系,提出了一种利用线性卷积计算循环卷积的快速算法,并给出了算法详细流程图,在 MATLAB 平台上进行不同点数的循环卷积仿真实现,验证了新算法的正确性。研究结果表明,该算法适用于任何点数的循环卷积计算,过程简单便捷,运算量小,大大简化了有限长序列循环卷积的计算。

关键词:有限长序列,线性卷积,周期卷积,循环卷积

Fast Improved Algorithm for Cyclic Convolution Calculated by Linear Convolution

BI Chunyan, XU Jin

(School of Electrical and Electronic Information Engineering, Sichuan University Jinjiang College, Sichuan, 620860, China)

Abstract: Cyclic convolution, whether directly by definition or a graphical method calculation process is more complex. This paper analyzes the relationship between linear convolution, periodic convolution and cyclic convolution of the finite sequence, puts forward a fast algorithm for cyclic convolution calculated by linear convolution, and gives the detailed algorithm flow chart. Through different points of circular convolution simulation on the MATLAB platform, verifies the validity of the algorithm. Research results show that the algorithm is applicable to any points of circular convolution calculation, the process is simple and convenient, small computational complexity, greatly simplifies the finite sequence of circular convolution calculation.

Keywords: finite sequence, linear convolution, periodic convolution, cyclic convolution

1　引言

卷积是数字信号处理领域中重要的运算之一[1]。卷积有线性卷积、周期卷积、循环卷积等。线性卷积反映了线性时不变系统(Linear time - invariant system,LTI)对输入信号的作用方式[2],是 LTI 分析与设计的基础,它广泛地应用于数字通信、图像处理、系统分析等领域,FIR(Finite Impulse Respouse)滤波器在实际中一般都是通过线性卷积实现的[3]。对离散信号做傅立叶变换(DFT)得到离散信号的频谱密度,DFT 的周期性引入了周期卷积和循环卷积。DFT 的卷积性质为利用循环卷积计算线性卷积提供了一条便捷的途径。尤其是其快速算法 FFT(快速傅里叶变换)的出现,使得利用循环卷积计算线性卷积成为了常规思维,很多文献都做了详细的阐述[4-8]。但是,逆向思维即利用线性卷积计算循环卷积的方法极少有论述,线性卷积有成熟的不是基于循环卷积的算法,MATLAB 仿真中也有现成的函数可以使用[9-11],所以这个逆向思维的研

本文于 2017 - 01 - 18 收到,2017 - 02 - 21 完成修改。
* 四川省教育厅科研项目(17ZB0261)。

究很有必要。

本文基于此逆向思维,利用已有的计算线性卷积算法,给出了线性卷积计算有限长序列循环卷积的计算方法及相应的 MATLAB 仿真。

2　卷积相关概念

2.1　线性卷积

长度分别为 N_1,N_2 的两个有限长序列 $f_1[n]$、$f_2[n]$ 的线性卷积定义如式(1)。

$$f_l[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1[m] f_2[n-m] = \sum_{m=0}^{N_1-1} f_1[m] f_2[n-m] \tag{1}$$

一般写作 $f_l[n] = f_1[n] * f_2[n]$。

计算的结果是一个长度为 $N_1 + N_2 - 1$ 的序列。即:有限长序列线性卷积的结果其长度为参与卷积运算的两个序列长度和减 1。

2.2　周期卷积

两个分别具有相同周期 N 的离散时间周期信号 $\tilde{x}_1[n]$ 与 $\tilde{x}_2[n]$ 的周期卷积(和)定义如式(2)。

$$\tilde{y}[n] = \tilde{x}_1[n] \otimes \tilde{x}_2[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} \tilde{x}_1[k] \tilde{x}_2[n-k] \tag{2}$$

式(2)中 $\langle N \rangle$ 代表任意一个周期区间[12]。计算的结果仍是一个具有相同周期 N 的周期信号序列。

2.3　循环卷积

长度分别为 N_1,N_2 的两个有限长序列 $f_1[n]$、$f_2[n]$ 的 N 点循环卷积定义如式(3)。

$$f_c[n] = \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} f_1[m] f_2(([n-m]))_N \right\} R_N(n) = \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} f_2[m] f_1(([n-m]))_N \right\} R_N(n) \tag{3}$$

一般写作 $f_c[n] = f_1[n] \otimes f_2[n]$,式(3)中 $N \geqslant \max[N_1, N_2]$,$f_2(([n-m]))_N$ 和 $f_1(([n-m]))_N$ 是以 N 为周期的周期信号[13]。

计算的结果是一个长度为 N 的序列,可以看作是周期序列 $\tilde{f}_1[n]$ 和 $\tilde{f}_2[n]$ 做周期卷积后再取主值序列,其中 $\tilde{f}_1[n]$ 和 $\tilde{f}_2[n]$ 是将 $f_1[n]$ 和 $f_2[n]$ 周期延拓后的周期序列。

3　线性卷积计算循环卷积

3.1　线性卷积、周期卷积和循环卷积的关系

这里以两个具体的序列为例。设 $f_1[n] = \{1,2,4,0,5\}$,$f_2[n] = \{5,7,6,9\}$ 都是起点为原点的序列,如图 1 所示。

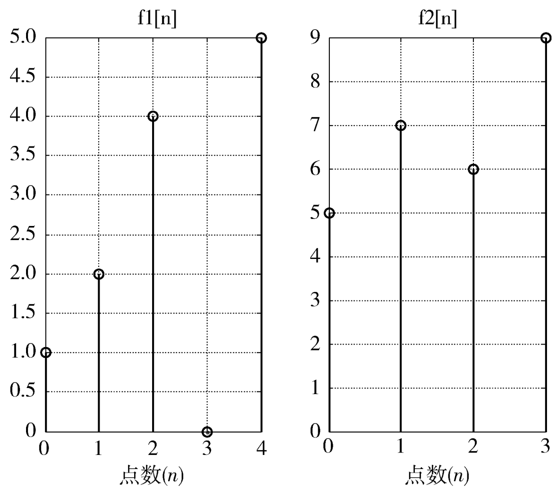


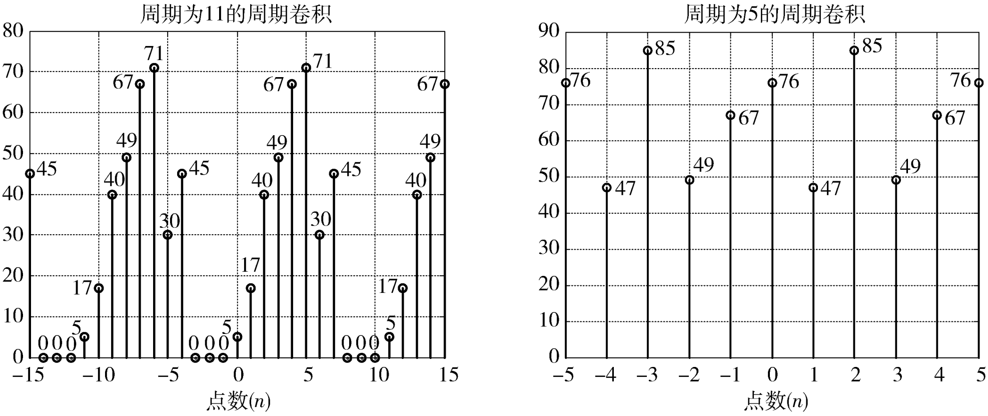
图 1　序列 $f_1[n]$ 和 $f_2[n]$

采用乘法竖式法计算两者的线性卷积,得到结果如式(4)。

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & & & & 1 & 2 & 4 & 0 & 5 \\
 & & & \times & 5 & 7 & 6 & 9 & \\
\hline
 & & & & 9 & 18 & 36 & 0 & 45 \\
 & & & 6 & 12 & 24 & 0 & 30 & \\
 & & 7 & 14 & 28 & 0 & 35 & & \\
+ & 5 & 10 & 20 & 0 & 25 & & & \\
\hline
 & 5 & 17 & 40 & 49 & 67 & 71 & 30 & 45
\end{array} \tag{4}$$

即卷积结果 $f_l[n] = f_1[n] * f_2[n] = [5\quad 17\quad 40\quad 49\quad 67\quad 71\quad 30\quad 45]\quad \underset{\uparrow}{n=0}$。将 $f_1[n]$ 和 $f_2[n]$ 分别以 5、11 为周

期进行周期延拓后，进行周期卷积，得到结果如图 2 所示。



(a) 周期为5的周期卷积结果　　(b) 周期为11的周期卷积结果

图 2　周期卷积结果

根据定义依次直接计算两个序列的 4 点、5 点、6 点、7 点、8 点和 9 点的循环卷积，得到结果如图 3 所示。

研究分析，线性卷积、周期卷积和循环卷积三者有如下关系：

(1) 周期卷积是线性卷积的周期延拓，如式(5)。

$$\tilde{f}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_l(n + rN) \tag{5}$$

(2) 循环卷积是周期卷积的主值序列。

注意：式(3)的循环卷积定义是一般文献中的描述，直接计算的前提是 $N \geqslant \max[N_1, N_2]$，当 $N < N_1$ 或者 $N < N_2$，则不能用式(3)直接计算，否则分别用式(3)中的两个公式计算，即在 $f_1[n]$、$f_2[n]$ 卷积顺序不同时，会出现计算结果不一致的问题。这种情况下可从循环卷积与周期卷积的关系出发，将式(3)进行修改为式(6)，以便适用任意点数 N。即首先需对 $f_1[n]$、$f_2[n]$ 都进行周期为 N 的周期延拓，然后再取主值序列进行计算。

$$f_c[n] = \left[\sum_{m=0}^{N-1} f_1([m])_N f_2([n-m])_N\right] R_N(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} f_2([m])_N f_1([n-m])_N\right]$$

$$R_N(n) = \left\{\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{f}_1[m]\tilde{f}_2[n-m]\right\} R_N[n] \tag{6}$$

(3) 根据式(5)和式(6)得出循环卷积与线性卷积之间关系式如式(7)。

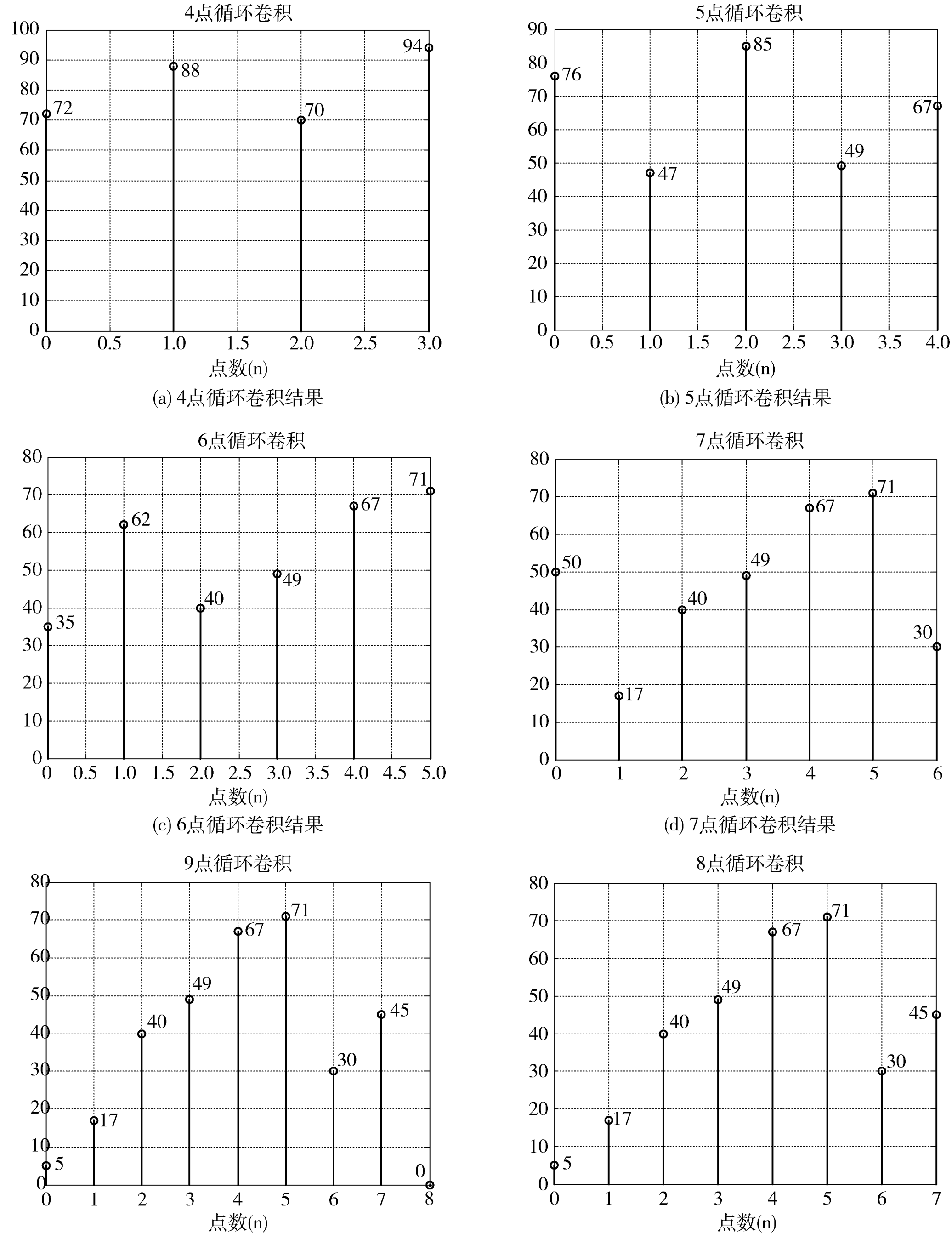
$$f_c[n] = \left\{\sum_{r=-\infty}^{\infty} f_l[n + rN]\right\} R_N(n) \tag{7}$$

N 点循环卷积等于线性卷积以 N 为周期的周期延拓序列的主值序列。$f_l[n]$ 的长度为 $N_1 + N_2 - 1$，所以只有当 N 满足 $N \geqslant N_1 + N_2 - 1$ 时，$f_l[n]$ 以 N 为周期进行周期延拓才无混叠现象，此时有 $f_c[n] = f_l[n]$。当 N 不满足 $N \geqslant N_1 + N_2 - 1$ 时，循环卷积与线性卷积是不等的。

3.2　线性卷积计算循环卷积方法

根据以上分析，当循环卷积点数 N 满足 $N \geqslant N_1 + N_2 - 1$ 时，线性卷积与循环卷积是等价的，如图 3(e)和图 3(f)。而当 N 不满足 $N \geqslant N_1 + N_2 - 1$ 时两者是不同的，如图 3(a)—图 3(d)，此时，可以从坐标出发，对线性卷积中各坐标做循环卷积点数的模运算，模运算相同的对应值进行相加，依次列出，与线性卷积中剩下的值按顺序重组即得循环卷积结果。比如 $f_1[n]$ 和 $f_2[n]$ 的 4 点循环卷积，先将两序列的线性卷积坐标(0,1,2,3,4,5,6,7)进行模 4 运算，结果为(0,1,2,3,0,1,2,3)，将相同值对应取值进行叠加，如图 4 所示。

同理，5 点循环卷积是把线性卷积中坐标进行模 5 运算，然后将相同值对应的取值进行叠加。



(a) 4点循环卷积结果 (b) 5点循环卷积结果

(c) 6点循环卷积结果 (d) 7点循环卷积结果

(e) 8点循环卷积结果 (f) 9点循环卷积结果

图 3 循环卷积结果

6 点和 7 点循环卷积是把线性卷积中坐标分别进行模 6 和模 7 运算,然后再将对应值进行叠加即可。见图 5 所示。

将图 3 和图 5 进行比较,验证得知,新算法(3.2 节描述)的正确性。

	5	17	40	49	
	(0	1	2	3)	坐标
+	67	71	30	45	
	(4	5	6	7)	坐标
	72	88	70	94	
	(0	1	2	3)	坐标

图 4 线性卷积计算 4 点循环卷积

3.3 算法分析

FFT 计算循环卷积时对点数有限制,根据 DFT 时域卷积定理,循环卷积的点数要大于等于两个序列长度的最大值,新算法只需按照成熟的算法计算出线性卷积,然后对坐标进行模运算后再相同值叠加,可以计算任意点的循环卷积,与其他常用解

```
   5    17   40   49   67            5   17   40   49   67   71            5  17  40  49  67  71  30
  (0     1    2    3    4) ←坐标    (0    1    2    3    4    5) ←坐标    (0   1   2   3   4   5   6) ←坐标
+ 71    30   45                   + 30   45                            +(45
  (5     6   45)         ←坐标      (6    7)                 ←坐标      (7)                         ←坐标
  76    47   85   49   67           35   62   40   49   67   71           50  17  40  49  67  71  30
  (0     1    2    3    4) ←坐标    (0    1    2    3    4    5) ←坐标    (0   1   2   3   4   5   6) ←坐标
```

图 5　线性卷积计算循环卷积

法相比，不受条件限制。表 1 列出了本文算法与 FFT 方法运算时间比较，可以看出本文提出的算法与 FFT 相比，随着点数的增加运算量小，速度快。

表 1　算法与 FFT 运算时间比较(单位:s)

算法	点数						
	3	9	16	32	64	128	256
本文算法	0.000052	0.000033	0.000033	0.000033	0.000033	0.000033	0.000033
FFT		0.000033	0.000035	0.000038	0.000042	0.000046	0.000052

4　仿真实现

根据前面分析，对新算法在 MATLAB 平台上进行设计仿真。流程图如图 6 所示。整个过程时间花费少，占用空间少。按照此算法流程，计算出 3 点和 9 点循环卷积结果见图 7 所示，与利用式(5)计算的结果一致。

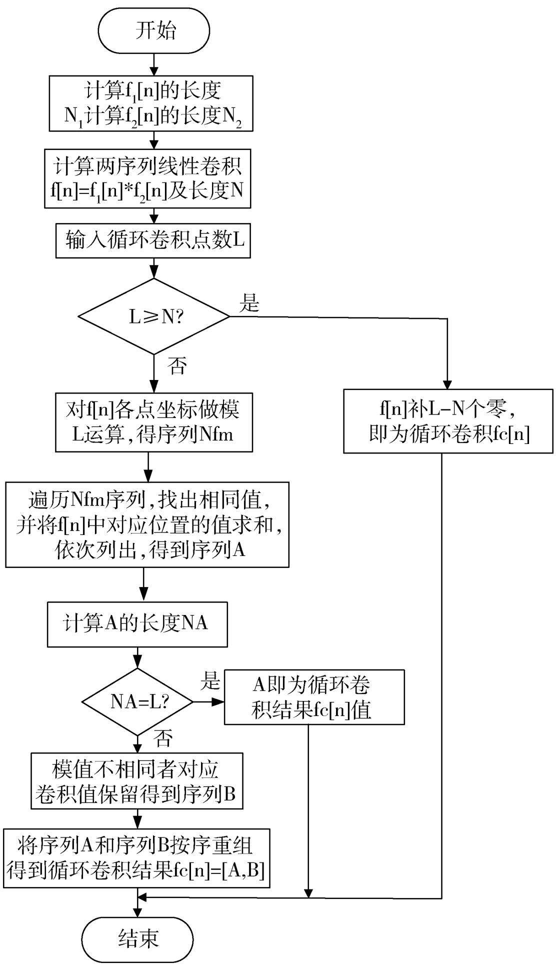


图 6　线性卷积计算循环卷积流程图

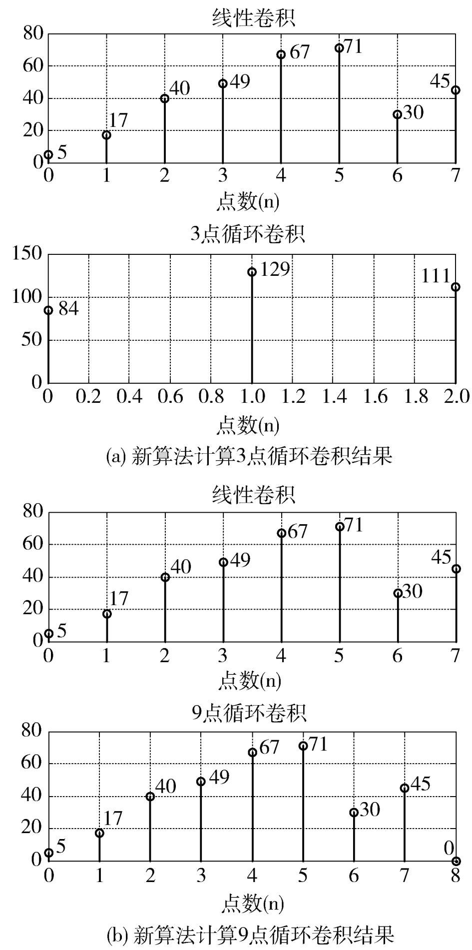


图 7　新算法计算循环卷积结果

(下转第 47 页)